TD – Représentation de l'information Nombres entiers et à virgule

La mémoire des ordinateurs est constituée d'une multitude de petits circuits électroniques qui ne peuvent être, chacun, que dans deux états. On a décidé d'appeler ces états 0 et 1.
Une telle valeur, 0 ou 1, s'appelle un *booléen*, un *chiffre binaire*, ou encore un ***bit*** (***bi**nary digi**t***).
Un tel circuit à deux états s'appelle un *circuit mémoire un bit*.
L'état d'un circuit, composé de plusieurs de ces circuits mémoire un bit, se décrit par une suite finie de 0 et de 1, que l'on appelle un *mot*. par exemple, le mot 100 décrit l'état d'un circuit composé de trois circuits mémoire un bit, respectivement 1, 0 et 0.
Les mots les plus souvent utilisés sont de 8 bits (**octet**), de 16, 32 ou 64 bits.

Exercice 1 :

1. On imagine un ordinateur dont la mémoire est constituée de quatre circuits mémoire un bit. Quel est le nombre d'états possibles de la mémoire de cet ordinateur ?
2. Même question pour un ordinateur dont la mémoire est constituée de dix circuits mémoire un bit.
3. Et 34 milliards de tels circuits ? Est-ce *beaucoup* pour un ordinateur actuel ?

Exercice 2 :
On veut représenter chacune des sept couleurs de l'arc-en-ciel par un mot, les sept mots devant être distincts et de même longueur. Quelle est la longueur minimale de ces mots ?

I – Représentation des entiers naturels

1) La base dix

Exercice 3 :
On dispose de 2634 objets. On les groupe par paquets de dix, puis on groupe ces paquets de dix objets en paquets de dix paquets, etc. Effectuer ces regroupements et donner le nombre de chaque paquets.
Quel est le nombre maximal de paquets de chaque groupe que l'on peut faire ?

2) La base cinq

Exercice 4 :
On dispose de 47 objets. On les groupe par paquets de cinq, puis on groupe ces paquets de cinq objets en paquets de cinq paquets, etc. Effectuer ces regroupements et donner le nombre d'objets isolés, de paquets de 5, de paquets de 5×5, etc.

Exercice 5 :

1. Trouver la représentation en base cinq du nombre 944 .
2. De combien a-t-on besoin de chiffres pour écrire les entiers naturels en base cinq ?

Exercice 6 :

Trouver la représentation en base dix du nombre 401302 (en base cinq).
Remarque : 401302 (en base cinq) peut se noter 401302_5 .

3) La base deux – Notation binaire

Exercice 7 :

1. De combien de chiffres a-t-on besoin pour écrire les entiers naturels en base deux ?
2. Trouver la représentation en base deux du nombre 123
3. Trouver la représentation en base dix du nombre 10010110_2 .

Exercice 8 :

1. Sur un **octet** (8 bits), combien peut-on représenter de nombres ?
2. Montrer qu'avec un mot de n bits, on peut représenter les nombres de 0 à $2^n - 1$.

Exercice 9 :

Pour multiplier par dix un entier naturel exprimé en base dix, il suffit d'ajouter un 0 à sa droite, par exemple, $12 \times 10 = 120$. Quelle est l'opération équivalente pour les entiers naturels exprimés en base deux ? Exprimer en base deux les nombres 3 , 6 et 12 .

Exercice 10 :

On donne deux nombres écrits en binaire sur un octet : $a = 11010011_2$ et $b = 00011010_2$.

1. En posant l'addition, calculer $a + b$. Attention, lorsque l'on a $1 + 1 = 10$, on pose 0 et on retient 1.
2. De même, poser la multiplication de a par b.
3. En convertissant en écriture décimale les nombres a et b et ceux obtenus aux questions 1 et 2, vérifier les résultats précédents.

Exercice 11 :

Quelle est la représentation binaire du nombre 57 ? Et celle du nombre 198 ?
Soit m un mot de 8 bits, n l'entier naturel représenté en binaire par le mot m, m' le mot obtenu en remplaçant dans m chaque 0 par un 1 et chaque 1 par un 0 et n' l'entier naturel représenté en binaire par le mot m'. Exprimer n et n' comme une somme de puissances de 2, montrer que $n + n' = 255$.
Montrer que la représentation binaire du nombre $255 - n$ est obtenue en remplaçant dans celle de n chaque 0 par un 1 et chaque 1 par un 0.

4) Une base quelconque - Exemple de la base 16 (notation hexadécimale)

En base 16, on a besoin de 16 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, puis A (dix), B (onze), C (douze), D (treize), E (quatorze) et F (quinze).

Exercice 12 :

1. Trouver la représentation en base seize du nombre 965 .
2. Trouver la représentation en base dix du nombre $4E2C_{16}$.
   Remarque : pour noter un nombre en hexadécimal, on le précède parfois de 0x : 0x4E2C .

L'écriture hexadécimale s'est substituée dans de nombreux programmes à l'écriture binaire. Cette écriture est avantageuse car un seul caractère code des nombres de 0 à 15 , et surtout, la conversion en binaire de ce caractère nécessite peu de calcul.

Exercice 13 :

1. Donner l'écriture du nombre $a = 11010011_2$ en écriture hexadécimale.
2. On découpe l'octet a en deux quartets $x = 1101_2$ et $y = 0011_2$. Donner l'écriture de x et y en hexadécimale. Comparer ce résultat à ceux de la question 1.
3. Montrer qu'en base 2, multiplier par 16 revient à ajouter quatre zéros à droite dans l'écriture d'un nombre. En déduire les raisons du phénomène observé aux questions précédentes.

II – Représentation des entiers relatifs en notation binaire

1) Première méthode – Un bit pour le signe

Une solution est de réserver un bit pour le signe de l'entier (0 pour + et 1 pour −) et d'utiliser les autres pour représenter sa valeur absolue.

Exercice 14 :

Avec des mots de 8 bits au total, quelle est l'étendue des valeurs que l'on pourra ainsi représenter ?

Exercice 15 :

Cette méthode à plusieurs inconvénients, l'un deux étant qu'il y a deux zéros. Donner l'écriture de ces deux zéros (sur 8 bits)

2) Deuxième méthode – Complémentation

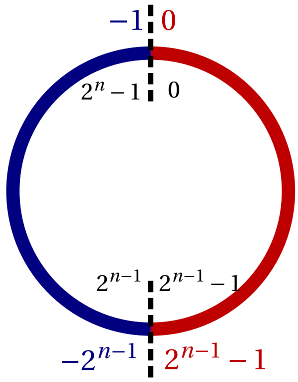
Cette méthode consiste à représenter un entier relatif par un entier naturel. Sur n bits, on représente :
- un entier relatif x **positif ou nul** comme l'entier naturel x ;
- un entier relatif x **négatif** comme l'entier naturel $x + 2^n$.

Cette manière de représenter les entiers relatifs s'appelle la **notation en complément à deux**.

Exercice 16 :
Combien d'entiers relatifs peut-on représenter avec des mots de 8 bits ?
On souhaite pouvoir représenter autant d'entiers positifs ou nuls que d'entiers strictement négatifs. Quels entiers seront représentés ?
Quels entiers relatifs seront représentés avec des mots de 16, 32 et 64 bits.

Plus généralement : avec des mots de n bits, on écrit les entiers relatifs compris entre -2^{n-1} et $2^{n-1}-1$.

- un entier relatif x **positif ou nul** compris entre 0 et $2^{n-1}-1$ est représenté par l'entier naturel x compris entre 0 et $2^{n-1}-1$.
- un entier relatif x **négatif** compris entre -2^{n-1} et -1 est représenté par l'entier naturel $x+2^n$ compris entre 2^{n-1} et 2^n-1.



Exercice 17 :

1. Trouver la représentation binaire sur 8 bits des entiers relatifs 0 et -128 .
2. Même question pour les entiers relatifs 127 et -127 .

Exercice 18 :

1. Comment trouver la représentation décimale d'un entier relatif x donné en binaire sur n bits ? (Envisager deux cas.)
2. Trouver la représentation décimale des entiers relatifs dont la représentation binaire sur 8 bits est $0010\,0010$ et $1010\,0010$.

Exercice 19 :
Si l'entier relatif x est compris entre 0 et 127 , alors il est représenté sur 8 bits par l'entier naturel $p = x$ et son opposé $-x$ est représenté par l'entier naturel $p' = -x + 2^8 = -x + 256 = 256 - p$.
Si l'entier relatif x est compris entre -127 et -1 , alors il est représenté par l'entier naturel $p = x + 2^8 = x + 256$ et son opposé $-x$ est représenté par l'entier naturel $p' = -x = 256 - p$.
Donc, sauf quand $x = -128$, dont l'opposé n'est pas représentable sur 8 bits, si un entier relatif x est représenté par l'entier naturel p, son opposé $-x$ est représenté par l'entier naturel $p' = 256 - p = (255 - p) + 1$.
Calculer $255 - p = 1111\,1111_2 - p$ est facile, puisqu'il suffit, dans la représentation binaire de p, de remplacer chaque 0 par un 1 et chaque 1 par un 0 (voir l'exercice 11). Il suffit ensuite d'ajouter 1 au nombre obtenu.

Application :

1. Calculer la représentation binaire sur 8 bits de l'entier relatif 4 , puis celle de son opposé.
2. Même question avec l'entier relatif -16 .